# Предисловие

У каждого из нас есть свое представление об окружающем мире. С течением времени оно меняется. По мере взросления человека окружающий мир в этом представлении становится всё сложнее. Всегда ли эти представления удачны, всегда ли они адекватно отображают мир? Конечно нет, часто на каком-то уровне развития они удовлетворяют потребности людей, но при переходе на более высокий уровень от этих представлений приходится отказываться, или их модернизировать. Как пример можно привести модель Вселенной, предложенную Птолемеем: Земля находится в центре Вселенной, вокруг неё вращаются другие планеты и т. д. До какого-то времени такое представление (или модель) успешно использовалась, но настали другие времена ...

Мысль, которую хочется донести следующая: не всякая модель удачна, не всякая модель универсальна, наши представления также динамичны, как и динамично наше развитие в широком смысле этого слова.

Для физических явлений, а также для множества других процессов, позволяющих каким-то образом формализовать их место в окружающем мире, эти представления превращаются в математические модели явлений или процессов. Математические модели необходимы для описания, исследования и прогнозирования. Они позволяют нам лучше понимать, контролировать и улучшать мир вокруг нас.

Разработчики моделей находятся под действием двух взаимно противоречивых тенденций: стремления к полноте описания и стремления к получению результатов более простыми средствами. Достижение компромисса ведется по пути построения серии моделей, начинающихся с предельно простых и заканчивающихся моделями высокой сложности (существует известное правило: начинай с простых моделей, а далее усложняй). Простые модели помогают глубже понять исследуемую проблему. Усложненные модели используются для анализа влияния различных факторов на результаты моделирования. Сложные системы требуют разработки целой иерархии моделей, различающихся уровнем отображаемых операций.

Все *вычисления на математических моделях* можно разделить на аналитические и численные.

*Аналитические модели* — один из классов математического моделирования, широко используемый при решении научных и инженерно-технических задач. При построении таких моделей исследователь сознательно отказывается от детального описания исследуемых систем оставляя лишь наиболее существенные, с его точки зрения, компоненты и связи между ними и использует достаточно малое число правдоподобных гипотез о характере взаимодействия компонентов и структуры системы. Аналитические модели служат в основном целям выявления различных закономерностей математического описания, анализа и объяснения свойств, присущих максимально широкому кругу систем.

*Численные методы* в математике, или методы приближённого решения математических задач, *предполагают выполнение* конечного числа элементарных операций над числами. В качестве элементарных операций фигурируют арифметические операции, выполняемые обычно приближённо. Поэтому в большинстве случаев получить точное решение задачи невозможно. Использование численных методов приводит к получению приближенного решения задачи.

Для многих задач известно только о существовании решения, но не существует конечной формулы, представляющей ее решение. Даже при наличии такой формулы ее использование для получения отдельных значений решения может оказаться неэффективным. Наконец, всегда существует необходимость решать и такие математические задачи, для которых строгие доказательства существования решения на данный момент отсутствуют. Во всех этих случаях используются методы численного решения, которые дают приближенные результаты.

Особенности компьютерных численных вычислений обычно оцениваются в терминах погрешности или точности вычислений. Оценка погрешности представляет одну из основных проблем численных методов: требуется решить поставленную задачу с использованием имеющихся ресурсов ЭВМ за обозримое время с заданной точностью.

Если решения являются приближенными, возникает задача получения результатов с некоторой *точностью*, то есть с гарантией того, что погрешность полученного результата будет меньше точности.

Как правило, численный метод представляет собой итеративный процесс, т. е. многократное повторение некоторых действий, при этом используется такой критерий, как *сходимость* метода. Численный метод сходится, если решение с каждым шагом итераций всё ближе к точному решению. Можно говорить о скорости сходимости. Сравнивают число итераций, необходимых для достижения требуемой точности численных методов решения одной и той же задачи, и делают вывод о том, какой метод быстрее.

Конечной точкой научного исследования является получение новых знаний при решении различных задач на моделях.

Для численного и аналитического решения различных задач имеется большое число математических пакетов, наиболее мощные из них, например, такие как Maple [1, 2], Mathematica [3, 4], Scilab [5], Matlab [6–8] и библиотеки Python [9], являются программными системами, включающими в себя специализированные системные и языковые средства, рассчитанные на применение в различных областях науки и техники.

В настоящее время активно развивается аналитические символьные вычисления — аналитические средства решения математических задач.

*Символьные вычисления* — это преобразования, обработка и символьное вычисление математических выражений, функций и уравнений аналогично тем, которые осуществляются по правилам математики на бумаге без компьютера.

Символьные вычисления отличаются от численных вычислений (расчётов) на компьютере, которые оперируют приближёнными численными значениями. Программные системы символьных вычислений (их также называют *системами компьютерной алгебры* — СКА) могут быть использованы для символьного интегрирования и дифференцирования, подстановки одних выражений в другие, упрощения формул и решения многих других задач.

Компьютерная алгебра (в отличие от численных методов) занимается разработкой и реализацией аналитических, точных методов решения математических задач на компьютере и при этом предполагает, что исходные данные, как и результаты решения задачи, сформулированы в аналитическом (символьном) виде.

Аналитические решения чаще всего удаётся получить для наиболее грубых (простых) моделей, реже — для более точных, сложных, для которых обычно используют численные методы, позволяющие получить *частные численные решения* с определенной точностью.

Термин «компьютерная алгебра» появился в конце 1970-х гг., а его синонимами являются: символьные вычисления, аналитические вычисления, формальные вычисления — это область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов.

Набор математических объектов, применяемых в символьных вычислениях, весьма разнообразен, в частности, в них используется более значительное множество рациональных чисел, чем при численных вычислениях. Это множество все равно остается конечным, но ограничения на допустимые размеры числа (количество знаков в его записи) связаны обычно с размерами оперативной памяти ЭВМ, что позволяет пользоваться практически любыми рациональными числами, операции над которыми выполняются за приемлемое время. При этом компьютерные операции над рациональными числами совпадают с соответствующими операциями рациональных чисел. Таким образом, снимается одна из основных проблем компьютерных вычислений — оценка погрешности.

Получаем следующие особенности символьных преобразований:

- отсутствуют погрешности;
- не теряется исходная и промежуточная информация о процессе;
- возможно быстрое разрастание промежуточных результатов.

При этом при решении задач с помощью средств компьютерной алгебры повышаются требования:

- к объему памяти и быстродействию компьютера;
- виду представления данных;
- эффективности алгоритмов.

Еще раз подчеркнем, что символьные вычисления имеют дело с вычислениями математических объектов символьно, почти так же, как это происходит при ручном расчете на бумаге вручную. Это означает, что математические объекты должны быть представлены точно, а не приближенно, а невычисленные математические выражения с числовыми и символьными объектами должны оставаться в символьной форме (в виде математических символов и выражений).

Очевидно, что у каждого, кто использует аналитические вычисления, свои потребности и области применения, когда дело доходит до символьных вычислений. Например, студенты могут быть заинтересованы в проверке решения определенных заданий по математике, физике и информационным технологиям, в то время как инженеры могут быть заинтересованы в проверке решений на простейших моделях, ученые будут сосредоточены на своей области исследований и т. д.

В данном учебном пособии рассмотрены программные средства некоммерческой библиотеки SymPy — символьных математических вычислений (рис. 1) [13]. Эта библиотека, как и многие другие библиотеки Python, является бесплатной, имеет открытый исходный код, написанный на Python. Существует также множество других научных и инженерных библиотек, разработанных на их основе, что делает систему Python жизнеспособной альтернативой коммерческим приложениям, таким как Matlab, Mathematica и Maple.

В идеальном мире СКА должна быть проста в освоении и использовании и должна требовать лишь минимального количества навыков программирования. В конце концов, математическое выражение — это всего лишь комбинация чисел и символьных переменных (также известных как символы) с использованием операций и функций.

На самом деле SymPy все еще находится в активной разработке и функционал добавляется в каждой новой версии. Может случиться так, что функции, которые необходимы, еще не реализованы, но, понимая внутренние механизмы, есть шанс создать их самостоятельно, учитывая открытость исходного кода.

С учётом этого данная книга будет сосредоточена на наиболее распространённых аспектах математики, реализованных в SymPy. В частности, в ней будут рассмотрены математические выражения, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, свойства функций, линейная алгебра и другие темы.

Учебное пособие «Символьные математические вычисления средствами SymPy Python» содержит материалы для изучения

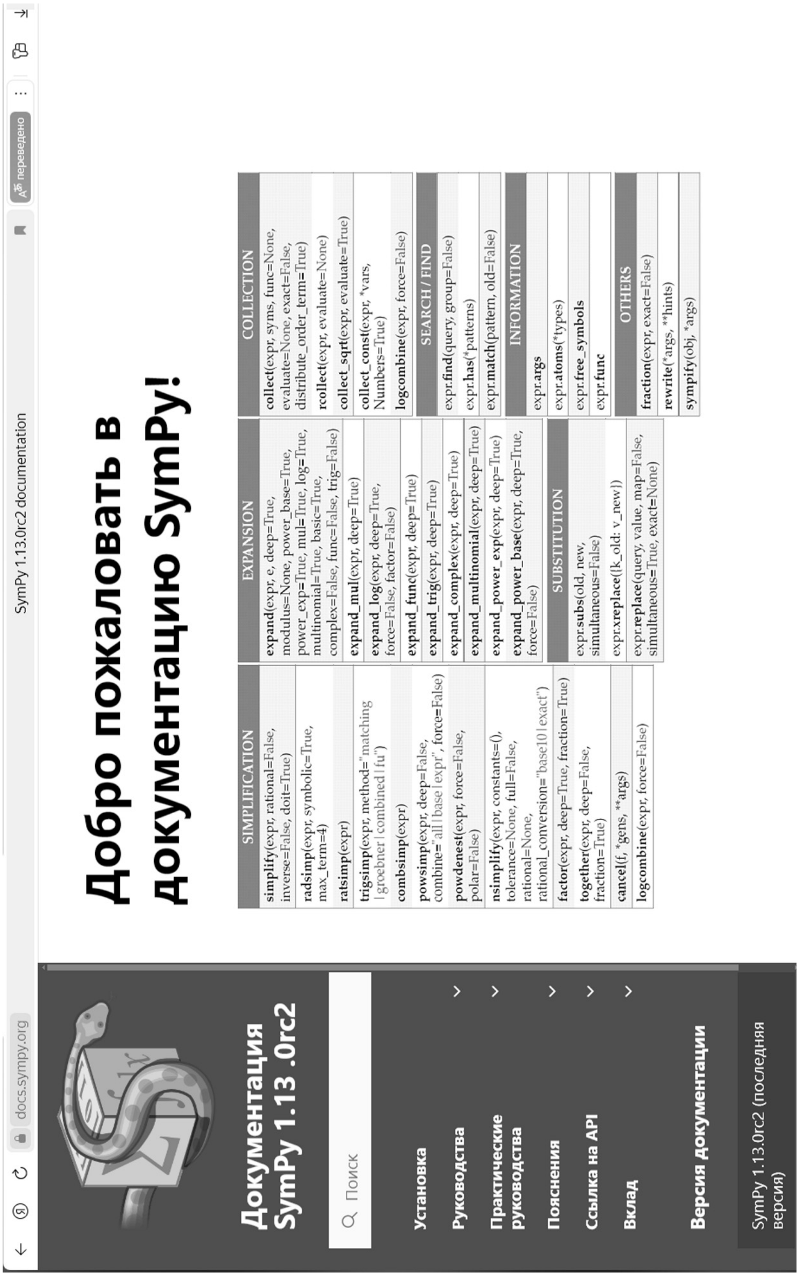


Рис. 1. Система Sympay

отдельных разделов дисциплины «Базовые средства математических пакетов» и может служить вспомогательным материалом дисциплины «Численные методы» для студентов вузов соответствующих направлений подготовки.

Пособие состоит из трех частей, охватывающих три уровня подготовки к использованию символьных математических вычислений, и двух приложений.

В **первой части** рассмотрены средства системы программирования Python для решения вычислительных задач (глава 1); понятия символьных объектов и их создание, а также предположения об их свойствах (глава 2); символьные математические выражения и их элементы (глава 3); символьные логические выражения (глава 4); построение графиков символьных выражений в SymPy (глава 5); манипулирование и преобразование символьных выражений (глава 6); основные понятия и определение символьных математических функций, их реализация, свойства и использование в SymPy (глава 7).

Во **второй части** рассмотрены средства SymPy для решения отдельных математических задач, таких как создание символьной функции из численно заданной функции с помощью методов интерполяции (глава 8); решение нелинейных уравнений (нахождение корней уравнений одной переменной и систем) (глава 9); решение задач исчисления (базовых задач математического анализа), таких как вычисление пределов, разложение в ряды и их суммирование, вычисление производных и интегралов (глава 10); примеры исследования математических функций (глава 11); средства SymPy для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (глава 12); а также представление матриц в SymPy и решение задач линейной алгебры (глава 13).

В **третьей части** рассмотрены примеры применения SymPy при анализе различных физических процессов (глава 14).

В **Приложении 1** представлены предопределенные элементарные математические функции SymPy, а в **Приложении 2** изложена реализация в SymPy понятий множеств, интервалов, доменов и изображений при описании символьных объектов.

Еще раз отметим, что в данном учебном пособии рассматриваются основы символьных вычислений средствами библиотеки SymPy Python для решения вычислительных задач, которая являются внешним модулями Python для математических аналитических вычислений. Понимая и используя эти методы, можно решать математические задачи, анализировать алгоритмы и моделировать явления реального мира.

Благодаря обширной поддержке символьной математики и интуитивно понятному интерфейсу SymPy является бесценным инструментом как для студентов, так и для профессионалов, работающих в различных областях. Включив SymPy в свои проекты на Python, можно выполнять математические вычисления и повысить точность и эффективность своей работы.

Материал данного учебного пособия соответствует стандарту подготовки бакалавров по направлению и может быть использован для подготовки студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика», а также студентов и аспирантов других направлений и широкого круга читателей, желающих освоить основы символьных вычислений.