Введение

Одной из центральных проблем теории связи, навигации и радиолокации является проблема помехоустойчивости и эффективности. Эти проблемы в значительной мере противоречивы: повышение помехоустойчивости, как правило, ведет к ухудшению эффективности и наоборот.

Одним из эффективных методов повышения помехоустойчивости систем различного назначения, развиваемых в последнее время является использование для решения задач обнаружения, различения и оценки параметров сигналов принципа латеральных обратных связей (ЛОС), широко реализуемый в различных биосистемах, который позволяет найти оптимальный компромисс между помехоустойчивостью и эффективностью. Причем этот принцип можно использовать как на базе аналоговых, так и цифровых методов обработки сигналов.

Данная монография посвящена вопросам применения принципа ЛОС для обработки как одномерных, так и многомерных сигналов и полей.

В первой главе рассматриваются математические модели аналоговых сигналов и полей: вероятностные функции одномерных и многомерных сигналов, сигнальных полей, их сечения и проекции.

Вторая глава посвящена многомерным дискретным сигналам, особое внимание уделено двумерным дискретным сигналам (ДДС) как наиболее широко используемых на практике: основные операции над ДДС, дискретные преобразования Фурье, многомерные z-преобразования ДДС.

В третьей и четвертой главах излагаются способы описания многомерных аналоговых и дискретных систем, их передаточные функции, частотные характеристики.

Пятая глава посвящена вопросам оптимальной фильтрации с ЛОС аналоговых сигналов и полей. В частности, рассматриваются задачи подавления помех в соседних каналах при обработке временных сечений сигнальных полей, обнаружения сигнала, одномерная и многомерная фильтрация с ЛОС стационарных и нестационарных процессов и полей.

В шестой главе рассматриваются вопросы цифровой фильтрации с ЛОС ДДС, исследуется помехоустойчивость ЦФ с ЛОС, а также влияние шумов ЛОС на помехоустойчивость систем обработки дискретных сигналов.

Учитывая важность оценки шумов квантования и ошибок округления в ЦФ с ЛОС, в 7-й главе рассматриваются шумовые модели ЦФ с ЛОС при рекурсивных и нерекурсивных способах их реализации, определяется дисперсия ошибок на выходе различных ЦФ с ЛОС, находится их оптимальная структура.

В заключительной 8-й главе проводится оценка эффективности систем обработки с ЛОС многомерных сигналов и полей, определяется потенциальная скорость передачи информации в сетях с внутрислойными и межслойными ЛОС, а также зависимость скорости передачи информации от помехоустойчивости в иерархической сети с конвергенцией путей передачи информации, широко реализуемый в различных биологических системах.

Все основные положения теории иллюстрируются примерами, позволяющими показать особенности и преимущества системы обработки различных сигналов и полей с использованием принципа ЛОС.

Автор выражает благодарность рецензентам профессору, доктору технических наук В.П. Шувалову и профессору, доктору технических наук Е.Б. Соловьевой за их замечания, способствующие улучшению содержания книги, а также Н.М. Гусельниковой за большую работу по подготовке рукописи к печати.

1 Многомерные аналоговые сигналы и поля

1.1. Аналоговые сигналы и способы их описания

Аналоговые сигналы описываются непрерывной во времени функцией $x(t)$, которая может принимать любые значения в определенном интервале.

Сигнал $x(t)$ в общем случае можно представить в форме линейных комбинаций базисных функций $f_k(t)$ (обобщенный ряд Фурье):

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t), \tag{1.1}$$

где a_k — коэффициенты разложения.

Причем функции $\{f_k(t)\}$ должны удовлетворять условию ортогональности на промежутке $t_1 - t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) f_k(t) f_l(t)\, dt = 0; \quad k \neq l,$$

где $p(t)$ — весовой коэффициент, и непрерывности с интегрируемым по весу $p(t)$ квадратом:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)[f_k(t)]^2\, dt < \infty.$$

Для ортонормированного базиса $\{f_k(t)\}$

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) f_k(t) f_l(t)\, dt = \delta_{kl}, \tag{1.2}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера:

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k \neq l. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения a_k определяются из равенства

$$a_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} p(t)x(t)f_k(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} p(t)f_k(t)f_l(t)\,dt}. \tag{1.3}$$

Для ортонормированной системы функций (1.2) равенство (1.3) примет вид

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} p(t)x(t)f_k(t)\,dt.$$

Обычно принимают $p(t) \equiv 1$, при этом

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} x(t)f_k(t)\,dt.$$

В технических приложениях обычно ограничиваются частичной суммой ряда (1.1):

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t). \tag{1.4}$$

Для сходящегося ряда (1.1) представление (1.4) дает определенную погрешность приближения, оцениваемую обычно отклонением $s_n(t)$ от $s(t)$ по норме эвклидова пространства

$$\varepsilon = \|x(t) - x_n(t)\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |x(t) - x_n(t)|^2\,dt}. \tag{1.5}$$

В математической литературе [17] доказывается, что из всех обобщенных полиномов n-го порядка наименьшее отклонение по норме (1.5) имеет частичная сумма ряда Фурье с коэффициентами a_k:

$$\varepsilon^2_{\min} = \left\| x(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t) \right\|^2 = \|x(t)\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{1.6}$$

Условие (1.6) известно как *тождество Бесселя.* Устремив $n \to \infty$ в (1.6), получим неравенство Бесселя, широко используемое в теории связи:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \|x(t)\|^2. \tag{1.7}$$

Для замкнутой ортонормированной системы $\{f_k(t)\}$ неравенство

(1.7) превращается в равенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|x(t)\| = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt, \qquad (1.8)$$

называемое иначе условием замкнутости или *равенством Парсеваля*.

Для того чтобы $x(t)$ можно было представить с помощью ряда (1.4), необходимо и достаточно выполнение условия (1.8).

Процесс построения ортонормированной системы $\{f_k(t)\}$ из системы линейно-независимых функций $\{\psi_k(t)\}$ может быть осуществлен с помощью процедуры Грама–Шмидта [20]. Процесс *ортогонализации Грама–Шмидта* производится по рекуррентным формулам:

$$f_k(t) = \frac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|} = \frac{v_k(t)}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} v_k^2(t)dt}},$$

где

$$\begin{cases} v_1(t) = \psi_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ v_{n+1}(t) = \psi_{n+1}(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f_k(t)\psi_{n+1}(t)\,dt \right\} f_k(t). \end{cases}$$

В теории связи часто используется разложение в ряд типа (1.4) по различным ортогональным многочленам. Эти многочлены могут быть получены различными способами. Например, такие многочлены, как полиномы Чебышева, Лежандра и Якоби, получаются как специальные решения гипергеометрических дифференциальных уравнений 2-го порядка; полиномы Лагера и Эрмита — как решение вырожденных уравнений Куммера [20] и т. д. Особенно широко используется разложение в ряд Котельникова [21] с функциями

$$f_k(t) = \frac{\sin[\omega_{\text{в}}(t - k\Delta t)]}{\omega_{\text{в}}(t - k\Delta t)},$$

ортогональными на интервале $-\infty < t < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) f_l(t)\,dt = \begin{cases} \pi/\omega_{\text{в}}; & k \neq l; \\ 0, & k = l. \end{cases}$$

При этом разложение (1.4) приобретает вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(k\Delta t) \frac{\sin[\omega_{\text{в}}(t - k\Delta t)]}{\omega_{\text{в}}(t - k\Delta t)}, \qquad (1.9)$$

где

$$n = \frac{T}{\Delta t} + 1 = 2f_{\text{в}}T + 1 \approx 2f_{\text{в}}T,$$

n — число отсчетов; T — длительность сигнала $x(t)$; $f_{\text{в}}$ — верхняя частота в спектре сигнала $x(t)$.

Равенство Парсеваля для разложения (1.9) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2f_{\text{в}}} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Ряд (1.9) имеет широкое применение при временном представлении непрерывных функций $x(t)$ ее дискретными выборками (прямая теорема Котельникова).

Основой спектрального представления $x(t)$ служит тригонометрическая форма *ряда Фурье*:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)\, dt;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t\, dt; \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t\, dt.$$

Для непериодического сигнала $x(t)$ спектральное представление определится парой преобразований Фурье:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \mathrm{e}^{j\omega t}\, d\omega,$$

где

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt.$$

— спектр сигнала $x(t)$.

Равенство Парсеваля при этом примет вид

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\,\omega,$$

где $|X(j\omega)|^2$— спектральная плотность энергии сигнала.

Наряду с сигналом $x(t)$ часто используется понятие комплексного сигнала:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + jx_1(t) = X(t)\mathrm{e}^{j\varphi(t)},$$

где $x(t)$ и $x_1(t)$ связаны парой преобразований Гильберта

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\,d\tau; \\ x(t) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_1(\tau)}{t-\tau}\,d\tau, \end{aligned}\right\}$$

где

$$X(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + x_1^2(t)}; \quad \varphi(t) = \operatorname{arctg}\frac{x_1(t)}{x(t)}.$$

1.2. Вероятностные характеристики одномерных аналоговых сигналов

Рассмотрим основные вероятностные характеристики одномерных аналоговых сигналов. Как показывает анализ экспериментальных данных, большинство обрабатываемых аналоговых сигналов представляет собой нестационарный случайный процесс общего вида $x(t)$ (где $x \in X$ и $t \in T$ — континуальные множества, t — время). Однако часто при проведении теоретических и экспериментальных исследований принимается гипотеза ограниченной стационарности и эргодичности. При этом в качестве статистической характеристики используются одномерные $p(x)$ и двумерные $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$ законы распределения.

Основанием для этого служит, во-первых, то обстоятельство, что многие параметры можно считать марковскими случайными процессами, для которых n-мерное распределение полностью определяется одномерным $p(x_0; t_0)$ и вероятностью перехода $p(x_1; t_1 \mid x_0; t_0)$:

$$p(x_0, \ldots x_n; t_0, \ldots t_n) = p(x_n; t_n \mid x_{n-1}; t_{n-1}) \cdots p(x_1; t_1 \mid x_0; t_0);$$

во-вторых, для ряда задач достаточно ограничиться исследованием корреляционной или спектральной характеристики, которые также могут быть получены из двумерного распределения. Кроме того, использование гипотезы локальной стационарности и эргодичности существенно облегчает получение количественных оценок исследуемого процесса по экспериментальным данным.

Вид функции распределения случайных процессов может быть самым различным. В качестве простейшей аппроксимации для суммарных электрических процессов можно использовать одномерный нормальный закон

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}, \qquad (1.10)$$

где σ_x^2 — дисперсия; m_x — математическое ожидание параметра x. Ряд источников может быть описан законом Пуассона, законом Эрланга

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \exp\{-\beta x\}$$

и Вейбулла

$$p(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x^2\},$$

где α, β — параметры распределения.

Огибающая случайных процессов в ряде важных случаев [18, 24] достаточно хорошо описывается законом Релея

$$p(x) = \frac{x}{\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\}. \tag{1.11}$$

Важную роль в экспериментальных научных исследованиях играют кросскорреляционный и взаимнокорреляционный анализы.

Корреляционная функция процесса $x(t)$ в общем случае определяется уравнением

$$B_x(t_1 t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1 x_2; t_1 t_2)\, dx_1 dx_2.$$

Для стационарного эргодического процесса автокорреляционная функция может быть определена по одной реализации путем усреднения во времени:

$$B_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\, dt.$$

Функцию корреляции обычно нормируют к значению $B_x(0)$:

$$\kappa_x(\tau) = \frac{B_x(\tau)}{B_x(0)}.$$

где $\kappa_x(\tau)$ — нормированная корреляционная функция.

В эксперименте иногда более удобно определять не корреляционную функцию, а спектральную характеристику $G_x(j\omega)$, связанную с корреляционной функцией парой преобразований Винера–Хинчина:

$$G_x(j\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_x(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau; \tag{1.12}$$

$$B_x(\tau) = \int_0^{\infty} G_x(j\omega) \cos\omega\tau\, d\omega.$$